Première partie

Révisions de Géométrie

1 Espace affine

1. **Définition**
   On appelle espace affine l'ensemble ε dont les éléments sont des points. A tout couple de points (M,N) de ε on associe le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{MN}$.
   Si on choisit un point particulier O, alors l'application $\begin{array}{l} \varepsilon \longrightarrow \mathcal{V} \\ M \longrightarrow \overrightarrow{OM} \end{array}$ est une bijection de ε vers l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs.

   <u>- Exercice 1</u>
   Soit le repère $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ deux points M(x, y, z) et N(x', y', z').
   a/ Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
   b/ Donner les coordonnées du milieu de [MN].

2. **Base**
   Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs, on appelle base de $\mathcal{V}$ tout triplet de vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tel que tout vecteur $\vec{V}$ de $\mathcal{V}$ puisse s'écrire de manière unique $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ Les réels x, y, z sont les composantes de $\vec{V}$ dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. On notera plus commodément $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

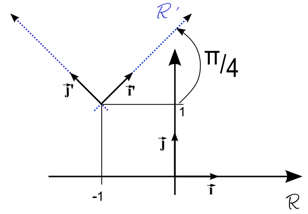
3. **Changement de repère**
   Un repère $\mathcal{R}$ de l'espace affine ε est constitué par
   - un point origine de l'espace, noté O ;
   - une base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.
   Soit le repère $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, un nouveau repère $\mathcal{R}'\{O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\}$ est défini par :
   - les coordonnées de la nouvelle origine dans le repère $\mathcal{R}$: $O'(x_0, y_0, z_0)$
   - les composantes des nouveaux vecteurs de base dans la base $\mathcal{B}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:
   $\vec{i'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$, $\vec{j'} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$, $\vec{k'} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$.
   La matrice de passage s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

   Les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrivent en fonction de celles de M dans le repère $\mathcal{R}'$:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y - y_0 = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z - z_0 = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{array} \right.$$

   <u>- Exercice 2</u>
   a/ Changement de repère par translation.
   On définit $\mathcal{R}'\{O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\}$ et $O'(x_0, y_0, z_0)$ tel que : $\vec{i'} = \vec{i}$, $\vec{j'} = \vec{j}$, $\vec{k'} = \vec{k}$. Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.
   b/ Changement de repère par rotation. (2 dim.)



Ecrire les formules de passage du repère $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ au repère $\mathcal{R}'\{O', \vec{i'}, \vec{j'}\}$ défini par $\left\{ \begin{array}{l} O'(-1, 1) \\ (\vec{i}, \vec{i'}) = (\vec{j}, \vec{j'}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$

c/ Trouver l'équation dans le repère $\mathcal{R}'$ (de la question précédente) de la courbe d'équation : $x^2 + y^2 + xy + x - y = 0$.

<u>- Exercice 3</u>
a/ Montrer que dans $\mathcal{R}^3$ les vecteurs $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{V_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base.
b/ Ecrire les formules de passage de la base $\mathcal{B}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ à la base $\mathcal{B}'\{\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}\}$

<u>- Exercice 4</u>
a/ Montrer que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ forment une base.
b/ Trouver dans cette base les composantes du vecteur $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

2 Droites et plans de l'espace affine

1. **Equation d'une droite dans ε**
   Soit $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère de ε et D la droite définie par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et le vecteur directeur $\vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Les coordonnées d'un point M appartenant à la droite s'écrivent : $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{array} \right.$ Ces relations constituent une représentation paramétrique de la droite. On peut obtenir l'équation cartésienne en éliminant λ de ces équations (2 équations) : $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$

   <u>- Exercice 5</u>
   a/ Donner la représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(2, 1, 0)$ et $B(-1, 3, 1)$.
   b/ Donner dans le plan l'équation cartésienne de la droite (D) passant par les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$.

   <u>- Exercice 6</u>
   Dans un espace de dimension 2 (le plan), l'équation cartésienne d'une droite est de la forme $ux + vy + h = 0$.
   Le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.
   a/ Quel est le vecteur directeur de la droite $2x - y + 3 = 0$? Représenter cette droite dans le plan.
   b/ Mêmes questions pour la droite $-x + \frac{y}{2} + 1 = 0$. Commentaires.

2. **Equation d'un plan**
   Soit $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère de ε_3 et (P) le plan défini par $A(x_0, y_0, z_0)$ et les vecteurs $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et

$\vec{V_2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$. Par définition si $M \in (P) \iff \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{V_1} + \mu\vec{V_2} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{V_1} + \mu\vec{V_2}$ d'où les coordonnées de M $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}$ $\lambda \in R \quad \mu \in R$ C'est l'équation paramétrique du plan.

L'équation cartésienne s'écrit en égalant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ à 0. $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$

qui s'écrit en développant par rapport à la première colonne $(x - x_0)\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ soit $(x - x_0)(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) - (y - y_0)(\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2) + (z - z_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0$ qu'on peut écrire $u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$ ou encore $ux + vy + wz + h = 0$

<u>- Exercice 7</u>
a/ Ecrire l'équation du plan (xOy) qui a pour vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
b/ Ecrire l'équation du plan déterminé par les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.
c/ Quelle est l'équation du plan parallèle à Ox et contenant la droite (D) d'équation $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

3 Produits de vecteurs

1. **Produit scalaire**

   Soit un repère <u>orthonormé</u> $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ avec $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, deux vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{V'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, le produit scalaire noté $\vec{V}.\vec{V'}$ est un <u>nombre</u> : $\vec{V}.\vec{V'} = xx' + yy' + zz'$.

   <u>- Exercice 8</u>

   Calculer le produit scalaire de $\vec{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. **Norme**
   On appelle norme euclidienne ou (module) du vecteur $\vec{V}$ le scalaire $\| \vec{V} \| = \sqrt{\vec{V}.\vec{V}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

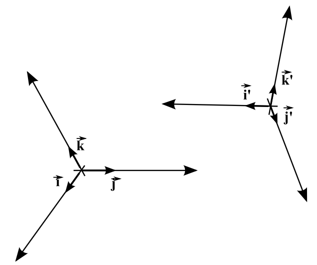
   <u>- Exercice 9</u>

   a/ Calculer $\| \vec{V} \|$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b/ Donner le vecteur $\vec{W}$ de même direction que $\vec{V}$ et qui a pour norme 1 (vecteur normé).

3. **Interprétation géométrique du produit scalaire**
   Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de leur angle. $\vec{V}.\vec{V'} = \| \vec{V} \| \times \| \vec{V'} \| \cos(\vec{V}, \vec{V'})$

   <u>- Exercice 10</u>
   On a représenté les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sur la figure suivante.



   $\| \vec{V_1} \| = 3$ et $\| \vec{V_2} \| = 2$. Calculer la norme du vecteur $\| \vec{V_1} + \vec{V_2} \|$

4. **Produit vectoriel de deux vecteurs**
   Soit deux vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{V'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ rapportés à la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. On appelle produit vectorielle de $\vec{V}$ par $\vec{V'}$, le <u>vecteur</u> noté $\vec{V} \wedge \vec{V'}$ de composantes $\vec{V} \wedge \vec{V'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -(xz' - x'z) \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

   <u>- Exercice 11</u>

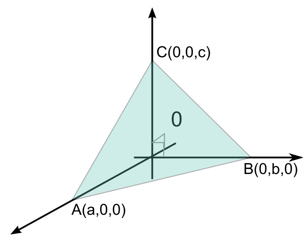
   a/ Calculer le produit vectoriel de $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

   b/ Soit $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i}$.

5. **Interprétation géométrique du produit vectoriel**

   Le produit vectoriel $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V'}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ et de norme $\| \vec{W} \| = \| \vec{V} \| \times \| \vec{V'} \| \times \sin(\vec{V}, \vec{V'})$. C'est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ représentant d'origine O de $\vec{V}$ et $\vec{V'}$.

   <u>- Exercice 12</u>
   Soit le triangle ABC représenté sur la figure ci-dessous :



a/ Représenter le vecteur $\vec{W} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b/ Donner l'interprétation géométrique de $\| \vec{W} \|$. Que vaut l'aire du triangle (ABC) : $\mathcal{A}(ABC)$?
c/ Calculer cette aire avec $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

Étant donnés trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$, on appelle produit mixte de ces 3 vecteurs la quantité : $[u, v, w] = \vec{u}.(\vec{u} \wedge \vec{w})$
On peut démontrer que l'on a invariance par toute permutation circulaire des vecteurs et antisymétrie du produit mixte par toute permutation non-circulaire.
Remarques :
Si deux des trois vecteurs sont égaux ou colinéaires, le produit mixte est nul. Application du produit mixte Si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ont un produit mixte non nul ils forment une base.

Deuxième partie

Nombres complexes

- Exercice 13 Formes cartésiennes, Règles de calcul, Représentation dans le plan
a/ Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 - 3\imath)(1 + \imath) \qquad z_2 = (1 + 2\imath)^2 \qquad z_3 = \frac{2 + \imath\sqrt{3}}{1 - \imath} \qquad z_4 = \frac{1}{1 + \imath} + \frac{1}{1 - \imath} \qquad z_5 = \left(\frac{2 + \imath}{1 - 2\imath}\right)^n$$

b/ Représenter les dans le plan complexe.
c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + 2\bar{z} = \imath$
d/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8 \mid z \mid^2 - 3 = 0$

- Exercice 14 Forme trigonométrique, Module et argument d'un nombre complexe
a/ Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2\imath \qquad z_2 = (\sqrt{3} + 3\imath) \qquad z_3 = 1 + \cos\varphi - \imath\sin\varphi \qquad z_4 = \frac{\cos\varphi - \imath\sin\varphi}{\sin\varphi - \imath\cos\varphi} \qquad z_5 = (1 + \imath\tan\varphi)^2$$

b/ Module et argument de $z + z^2$ si $z = e^{\imath\theta}$
c/ Module et argument de $\frac{a+b}{1+ab}$ si $a = e^{\imath\alpha}$ et $b = e^{\imath\beta}$
d/ Soit $z = x + \imath y$, avec $x \neq 0$.
Montrer que Arg $z = \text{Arctan } \frac{y}{x} + k\pi$ avec $k = 0$ si $x > 0$ et $k = 1$ si $x < 0$.
e/ Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$2 \text{ Arctan } \tfrac{1}{2} = \text{Arctan } \tfrac{4}{3}$$
$$\text{Arctan } \tfrac{1}{2} + \text{Arctan } \tfrac{1}{5} + \text{Arctan } \tfrac{1}{8} = \tfrac{\pi}{4}.$$

- Exercice 15 Formule de Moivre, Formule d'Euler. Applications trigonométriques
a/ Donner la formule d'Euler exprimant $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonctions d'exponentielles complexes.
b/ Utiliser cette formule pour calculer le produit $\sin\theta \sin\theta'$ en fonction d'une somme de fonctions trigonométriques.
c/ Linéariser $\sin^5 x$
d/ Linéariser $\sin^3 x \cos^2 x$

- Exercice 16 Racines n^{ime} d'un nombre complexe
a/ Trouver les racines carrés de $z_1 = \imath$; $z_2 = 1 + \imath$; $z_3 = \frac{-1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b/ Calculer et représenter les racines cubiques de $z_1 = \imath$; $z_2 = -1 + \imath$; $z_3 = 1 + \imath\sqrt{3}$.

- Exercice 17 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $4x^2 - 2x + 1 = 0$ et représenter les solutions dans le plan complexe.
b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x^2 + 2\imath x - 5 = 0$ et représenter les solutions dans le plan complexe.
c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x^4 - 2x^2\cos\varphi + 1 = 0$ avec $\varphi \in]0, \pi[$.
d/ En déduire la factorisation du trinôme $x^4 - 2x^2\cos\varphi + 1$ en un produit de deux polynômes du deuxième degré. Cas particulier où $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Mettre Calculer module et argument de z.
b/ Résoudre dans C, l'équation :

$$(3 + 2j)z + 1 - j = 0$$

Résoudre dans C, l'équation :

$$z + 3\bar{z} = 4 + j$$

- Exercice 18 Module et argument d'un nombre complexe

1. Déterminer le module et l'argument de $z = \frac{1-j}{1+j}$
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives $u = 1 + j$ et $v = 1 - 3j$. Déterminer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Troisième partie

Fonctions Numériques

- Exercice 19 limites
1. Trouver les limites des fonctions suivantes

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2x^2+x-3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \qquad \lim_{|x|\to \infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^3-1} \qquad \lim_{x\to -\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

- Exercice 20 Etude de fonction

1. Soit la fonction $f(x) - \frac{2}{(x+1)(x+3)}$
   a/ Montrer que la courbe (C) de la fonction f admet la droite Δ d'équation $x - -2$ comme axe de symétrie
   b/ Etudier et tracer $f(x)$
2. Etudier la fonction $f : x \to \sqrt{\mid x^2 + 4x - 5 \mid}$ et tracer sa courbe représentative.

- Exercice 21 Réciproque

1. a/ La fonction $f(x) = x^2$ admet-elle une fonction réciproque f^{-1} sur R ?
   b/ Définir, si cela est possible, la fonction f^{-1} sur une restriction de R et représenter la.
2. Soit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
   a/ Montrer que f définit une bijection continue d'un ensemble E à définir sur un ensemble F à définir.
   b/ Donner la fonction réciproque f^{-1} de f.

- Exercice 22 Dérivées

1. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \frac{1 + \mid x \mid}{1 + x^2}$$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\frac{x^3}{x^2-1} \quad ; \quad \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad ; \quad x\sqrt{x^2+x+1} \quad ; \quad \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

- Exercice 23 Primitives

1. Trouver la primitive de $f(x)$ définie sur $]-1,+\infty[$ $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$
2. Calculer la primitive $I_1=\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ à l'aide du changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$
3. Calculer la primitive $I_2=\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$ à l'aide d'un changement de variable approprié
4. Calculer, en intégrant par partie, les primitives

$$I_3=\int xe^x\,dx \qquad \text{et} \qquad I_4=\int e^{-x}\cos^2 x\,dx$$

Pour I_4, on linéarisera préalablement $\cos^2 x$.

Quatrième partie

Fonctions Puissance, Racine et Trigonométrique

4 Fonctions puissances, Racines, Exposants rationnels

- Exercice 24
a/ Etudier les fonctions $f(x)=x^{-1}$, $g(x)=x^{-2}$.
b/ Généraliser à la fonction $f_n(x)=x^{-n}$ avec $n\in\mathbb{N}$.

- Exercice 25
Soit la fonction

$$g(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{5/3}$$

a/ Etudier la dérivabilité de $g(x)$ sur l'intervalle $[0,1[$
b/ Calculer $g'(x)$
c/ Etudier la dérivabilité de g en $x=1$
d/ Tonner le tableau de variation de g et construire son graphe sur $[0,1]$

- Exercice 26
Pour tout entier n, on considère la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\text{pour}\quad n=0 \quad f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$
$$\text{pour}\quad n\geq 1 \quad f_n(x)=\frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}}$$

a/ Trouver les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition. Sens de variation de f_0. Construire C_0
b/ Calculer f'_n
c/ Sens de variation de f_1
d/ Sens de variation de f_2

5 Fonctions trigonométriques

- Exercice 27
Etudier les variations et construire dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f définie pour $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ par

$$f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x}$$

- Exercice 28
Soit la fonction $f\ x\longmapsto \arccos(4x^2-3x)$. On pose $\varphi(x)=4x^3-3x$
a/ Calculer $\varphi'(x)$

b/ Montrer que φ est impair. Limiter en conséquence l'intervalle d'étude
c/ Dresser la table de variation de φ
d/ Entre quelles valeurs doit être compris $\varphi(x)$ pour que f soit définie ?
e/ Montrer que

$$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1-4x^2}{|1-4x^2|}$$

f/ Simplifier $f(x)$ en intégrant $f'(x)$. On distinguera les cas $\frac{-1}{2}\leq x\leq\frac{+1}{2}$, $\quad \frac{+1}{2}\leq x\leq 1$, $\quad -1\leq x\leq\frac{-1}{2}$
g/ En supposant connu le graphe de $\arccos(x)$ tracer celui de $f(x)$.

Cinquième partie

Fonctions Logarithmes et Exponentielles

6 Fonction logarithme

- Exercice 29 Différentielle logarithmique
a/ Etudier la fonction $f\quad x\longmapsto \ln|x|$, la fonction $\ln x$ étant supposée connue.
b/ Calculer $(\ln|x|)'$
c/ En déduire $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
Plus généralement, on mémorisera le résultat :

$$\int\frac{du}{u(x)}=\ln|u(x)|+C$$

si $u(x)$ est une fonction dérivable et si $u(x)\neq 0$.
d/ On appelle $\frac{du}{u}$ la différentielle logarithmique :

$$\frac{du}{u}=d(\ln|u|).$$

Calculer la différentielle logarithmique des fonctions : $f=u.v$, $f=\frac{u}{v}$, $f=u^\alpha$.
e/ Calculer la différentielle logarithmique de $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}$

- Exercice 30 Application de la fonction logarithme de base a : Diagramme de Bode
Les diagrammes de Bode sont utilisés en électronique pour représenter les fonctions de transfert $T(jw)$ avec $w>0$.
Ils sont constitués de deux courbes :

$$\begin{cases} 20\log|T| &= f(\log w)\\ \arg T &= g(\log w)\end{cases}$$

On considère la fonction de transfert $T=1+j\frac{w}{w_0}$.
a/ Donner le module et l'argument de T.
b/ Etudier les variations de la fonction $20\log|T|$ en fonction de $\log w$
c/ Montrer que la droite[1] $y=20(\log w-\log w_0)$ est asymptote à la courbe.
d/ Etudier les variations de $\arg T$ en fonction de $\log w$
e/ Donner l'allure des courbes $20\log|T|$ et $\arg T$ en fonction de $\log w$.

7 Fonction exponentielle

- Exercice 31
On cherche la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{a}{x})^x$$

a/ Est-ce une forme indéterminée ?
b/ Montrer en posant $x=\frac{1}{X}$ qu'on peut lever l'indétermination en cherchant $\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+aX)}{aX}$.

1. en échelle logarithmique

c/ Rapprocher cette limite de la définition de la dérivée en 1 de la fonction $\ln x$.
d/ En déduire $\lim_{+\infty}(1+\frac{a}{x})^x$.
e/ Vérifier votre résultat en calculant $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$ puis $\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$.

- Exercice 32 Etudier la fonction

$$f(x) = x^x$$

Sixième partie
Equations Différentielles

- Exercice 33 Equations à variables séparables
a/ Résoudre $x + yy' = 0$
b/ Résoudre $x^2y' - y = 0$
c/ Résoudre $x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$
d/ Trouver la solution de l'équation différentielle $2xy' + y = 0$ qui prend pour $x = 2$ la valeur $y = 1$

- Exercice 34 Equation différentielle linéaire du premier ordre : Solution particulière "simple"
a/ Résoudre $y' + y = \cos x + \sin x$
b/ Résoudre $y' + y = 2$
c/ Résoudre $xy' - y = (x-1)e^x$

- Exercice 35 Equation différentielle linéaire du premier ordre : méthode de la variation de la constante
a/ Résoudre $xy' - 2y = x^3$
b/ Résoudre $y' + y\tan x = \sin 2x$
c/ Résoudre $y'(x^2-1) + xy = 1$

- Exercice 36 Equation différentielle linéaire du second ordre sans second membre
a/ Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$
b/ Résoudre $4y'' + 4y' + y = 0$
c/ Résoudre $y'' + y' + y = 0$

- Exercice 37 Equation différentielle linéaire du second ordre avec second membre sinusoïdal
a/ Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 3\cos 2x$
b/ Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 3\sin 2x$

- Exercice 38 Chute d'un corps avec résistance de l'air proportionnelle à la vitesse
Soit un corps de masse m subissant en chute libre une force de freinage $\vec{F} = -k\vec{v}$ proportionnelle à $\vec{v}$ (k coefficient de forme est positif). Le principe fondamental de la dynamique donne, en projection selon l'axe verticale orienté vers le bas :

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

a/ Donner la solution complète de cette équation différentielle.
b/ Le corps est laché sans vitesse initiale. Donner l'expression de $v(t)$. Quelle est la vitesse limite atteinte par le corps ?

- Exercice 39 Etablissement du courant dans un circuit contenant une bobine d'induction et une résistance
La loi d'Ohm appliquée à l'instant t aux bornes du générateur donne l'équation :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e(t) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} e(t) = 0 & \text{à} \quad t = 0 \\ e(t) = E & \text{à} \quad t > 0 \end{cases}$$

a/ Donner la solution complète de cette équation différentielle.
b/ Donner l'expression de $i(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

- Exercice 40 Régime propre d'un circuit R, L, C
La loi d'Ohm appliquée à l'instant $t > 0$ aux bornes du dipôle RLC donne l'équation :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Cette équation caractérise le régime propre du circuit.
a/ On considère le cas $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ d'un amortissement faible. On pose $\lambda = \frac{R}{2L}$, $w_0^2 = \frac{1}{LC}$, $w^2 = w_0^2 - \lambda^2$. Donner l'expression de la charge $q(t)$.
b/ Exprimer $q(t)$ avec les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $i(0) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = 0$.
c/ Représenter la fonction $q(t)$ caractérisant le régime périodique amorti. On tracera d'abord les fonctions $\pm q_0\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{w^2}}\,e^{-\lambda t}$. d/ Indiquer sur le graphe de $q(t)$ la grandeur $T = \frac{2\pi}{w}$ appelée pseudo-période.
e/ On considère le cas $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ d'un amortissement important. On pose $\beta^2 = \lambda^2 - w_0^2$. Donner l'expression de la charge $q(t)$.
f/ Déterminer $q(t)$ avec les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $i(0) = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = 0$.
g/ Trouver $\lim_{t\to\infty} q(t)$ et représenter ce régime dit apériodique.
h/ Enfin, on considère le cas $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ de l'amortissement critique. Déterminer $q(t)$ toujours avec les mêmes conditions initiales.
i/ Représenter le régime critique.

- Géométrie -

1. Identifier clairement les nombres et les vecteurs
2. Calculer les produits scalaires et vectoriels de deux vecteurs, un vecteur unitaire (et connaître les interprétations géométriques associées)
3. Reconnaître si un ensemble de vecteurs forme une base (à 3D)
4. Savoir changer de base des points, des vecteurs et des courbes de l'espace
5. Savoir retrouver des équations paramétriques et cartésiennes de droites et de plans dans $\mathbb{R}$
6. Comprendre la projection des vecteurs

- Nombres complexes -

1. Savoir passer des formes cartésienne au trigonométrique d'un nombre dans $\mathbb{C}$
2. Calculer aisément dans $\mathbb{C}$ (discriminants, racine énième, produit, puissance, etc)
3. Résoudre les linéarisations des fonctions trigonométriques.

- Fonctions -

1. Savoir réaliser une étude de fonction
2. Dériver aisément tout type de fonction
3. Calculer les limites aux points pertinents (cas des FI)
4. Savoir étudier une fonction réciproque simple
5. Maîtriser le calcul différentiel des fonctions usuelles (méthodes de dérivation, d'intégration)

Fonctions Puissances, Racines et trigonométriques

1. Connaître les fonctions trigonométriques (directes et inverses)
2. Utiliser facilement les relations contenant des fonctions puissances (et racines)
3. Etudes des fonctions puissances et composées de puissances (dérivation, etc.)
4. Connaître les formules de Moivre et d'Euler, savoir les appliquer

- 4 Fonctions ln et exp -

1. Connaître les fonctions logarithmique de différentes bases
2. Connaître les fonctions exponentielles de différentes bases
3. Réaliser sans état d'âme des calculs avec ces fonctions
4. Identifier les domaines de définitions
5. Apréhender la différentielle loagrithmique

- Equations différentielles -

1. Savoir résoudre des équations différentielles simples :
   – à variable séparable
   – linéaire du premier ordre avec ou sans second membre
   – linéaire du second ordre simple avec ou sans second membre
2. Connaître des exemples d'application en physique, etc

- Fonctions de plusieurs variables -

1. Savoir définir une fonctions de plusieurs variables
2. Savoir calculer ses différentes dérivées partielles
3. Connaitre l'interprétation géométrique à 3D
4. Connaitre la notion de différentielle ($df(x, y, z) =$)